

Wielowartościowość,
rozmytość i
quasi-rozmytość w
logikach adaptatywnych
oraz strukturach
kategorialnych: metody
modelowania i
reprezentacji

Cześć I

Krótki Biogram Prelegenta

- 1 **2002-2006**-studia filozoficzne (UAM, Poznań)
- 2 **2003-2008** -studia matematyczne (UAM, Poznań)
- 3 **2008-2011** - studia doktoranckie z filozofii (UKSW/UW, Warszawa)
- 4 **2011-2013** - pobyt typu post-doc w Munich Center of Mathematical Philosophy (LMU, Monachium)
- 5 **2013-2017** - studia doktoranckie w zakresie informatyki (Unicaen, Caen-Francja/ AGH, Kraków) - tryb co-tutelle
- 6 **od 2017** - zatrudnienie w Katedrze Informatyki Stosowanej Wydziału EAIiB
- 7 **2022** - pobyt na stypendium badawczym Komisji Fulbrigta w Centrum im. Saula Kripkego (CUNY, New York)

Cześć II

Omówienie Osiągnięcia Naukowego

Tytuł osiągnięcia naukowego:



Cykl 13 publikacji zatytułowany:

"Wielowartościowość, rozmytość i quasi-rozmytość w logikach adaptatywnych oraz strukturach kategorialnych: metody modelowania i reprezentacji".

Tytuł osiągnięcia naukowego:



- A13. Krystian Jobczyk, *An (Almost) Fuzzy Logic of Action and Preferences, its Quasi-model Interpretations, and the Problem of its Decidability*, International Journal of Approximate Reasoning 2023, Elsevier/w druku/ (IF: 3,9; 140 pkt. MNiSW)
- A12. Krystian Adam Jobczyk, Krzysztof Kluza, *Lindström's Characterizability of Abstract Fuzzy Logic Systems for Convolutions*, IEEE International Conference on Fuzzy Systems FUZZ-IEEE 2023: 1-6. (CORE: B, 70 pkt. MNiSW)
- A11. Krystian Jobczyk, *The Fuzzified Natural Transformation between Categorical Functors and Its Selected Categorical Aspects*, Symmetry 12(9): 1578 (2020) (IF: 2,731; 70 pkt. MNiSW).
- A10. Krystian Jobczyk, *The Fuzzy Natural Transformations, the Algebra $P(\omega)/fin$, and Generalized Encoding Theory*, IEEE Access 10: 15135-15150 (2022), IEEE Inc. (IF: 3, 476; 100 pkt. MNiSW).
- A9. Krystian Jobczyk, *A Multi-Valued Simplified Halpern-Shoham-Moszkowski Logic for Gradable Verifiability in Reasoning about Digital Circuits*, Electronics 10: 1817(2021), MDPI, DOI: 10.3390/electronics10151817 (IF: 2,690; 100 pkt. MNiSW)
- A8. Krystian Jobczyk: *The Lindström-Type Characterization of Hajek's Fuzzy Logic of Integrals*, IEEE International Conference on Fuzzy Systems FUZZ-IEEE 2021: 1-8. (CORE: B, 140 pkt. MNiSW)
- A7. Krystian Jobczyk, Antoni Ligęza: *The Natural Transformations with the Multi-Fuzzy Commutativity Condition*, IEEE International Conference on Fuzzy Systems FUZZ-IEEE 2020: 1-9. (CORE 2020: A, 140 pkt. MNiSW)
- A6. Krystian Jobczyk, *Multi-valued deontic Halpern-Shoham logic for fuzzy deontic-temporal expressions*, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems 36(5): 5091-5103 (2019), IOS. (IF: 1,976, 70 pkt. MNiSW)
- A5. Krystian Jobczyk, Patryk Gałczyński: *The natural transformations with fuzzified commutativity*, IEEE International Conference on Fuzzy Systems FUZZ-IEEE 2019: 1-6. (CORE 2019: A, 140 pkt. MNiSW)
- A4. Krystian Jobczyk, Antoni Ligęza, *An Epistemic Simplified Interval Temporal Logic of Moszkowski for Fuzzified Justification*, IEEE International Conference on Fuzzy Systems FUZZ-IEEE 2019: 1-8. (CORE 2019: A, 140 pkt. MNiSW)
- A3. Krystian Jobczyk, Antoni Ligęza, *An Epistemic Halpern-Shoham Logic for Gradable Justification*, IEEE International Conference on Fuzzy Systems FUZZ-IEEE 2018: 1-8. (CORE 2018: A, 140 pkt. MNiSW)
- A2. Krystian Jobczyk, Antoni Ligęza, *Towards a new convolution-based approach to the specification of STPU-solutions*, IEEE International Conference on Fuzzy Systems FUZZ-IEEE 2016: 282-289. (CORE 2016: A, 140 pkt. MNiSW)
- A1. Krystian Jobczyk, Antoni Ligęza, *Multi-Valued Preferential Halpern-Shoham logic for relations of Allen and preferences*, IEEE International Conference on Fuzzy Systems FUZZ-IEEE 2016: 217-224. (CORE 2016: A, 140 pkt. MNiSW)

Konwencje Metodologiczne:



- Uwaga 1. Para pojęć '**reprezentacja-modelowanie**' w odniesieniu: wielowartościowości, rozmytości i quasi-rozmytości jest rozumiana nieco inaczej w przypadku **1. logik adaptatywnych** – a inaczej w przypadku **2. struktur kategorialnych**.
- Uwaga 2. W **1. logik adaptatywnych** przez reprezentację rozumie się ich językowy opis w (analizowanych) rachunkach logicznych, a przez modelowanie – interpretowanie semantyczne tych fenomenów w modelach tych rachunków.
- Uwaga 3. W przypadku **2. struktur kategorialnych** – ze względu na trudności z nierozdzielalnością poziomów: opisu i interpretacji – pojęcia 'reprezentacji' i 'modelowania' są traktowane jako nie w pełni nierozdzielalne.
- Uwaga 4. Pomimo zarysowanej niejednoznaczności w paradygmacie kategorialnym przyjmuje się tu konwencję traktowania badanych fenomenów (w praktyce różnych form diagramów i multi-diagramów) i ich analiz za *modelowanie semantyczne*.

Motywacja Badawcza:



- 1 **Dysonans pomiędzy paradygmatami modelowania logik typu modalnego (np. epistemicznych, temporalnych, deontycznych) i logik rozmytych.** (Modelowanie w semantykach Kripkego versus modelowanie w semantykach algebraicznych, opartych strukturach takich jak np. MV-algebry, BL-algebry).
- 2 **Logiki rozmyte interpretowane w semantykach algebraicznych są mało zdadne do opisu i modelowania wielu konceptów z teorii systemów rozmytych i ich zastosowań, takich jak całki, sploty czy miary.**
- 3 **Tak interpretowane logiki rozmyte są zasadniczo niezgadnialne semantycznie z ww. logikami typu modalnego interpretowanymi relacyjnie.**

- 1 **Niezdolność do uchwytowania (na poziomie opisu jak i modeli) ww. obiektów typu analitycznego odnosi się do logik typu modalnego – także tych zorientowanych aplikacyjnie.** Logiki te nie są przystosowane do opisu i modelowania zjawisk, procesów i własności o stopniowalnej specyfice.
- 2 **Potrzeba wprowadzenia quasi-rozmytości – jako formy pośredniej między wielwartościowością a rozmytością jako adekwatnego aparatu do modelowania ww. obiektów analitycznych w logikach rozmytych i modalnych**
- 3 Niezdolność klasycznej tkanki teorii kategorii do uchwytowania rozmytości i wielwartościowości sugeruje potrzebę wyposażenia jej w taką zdolność.

Wreszcie, tematyka badań wyrasta z następujących szczegółowych pytań, idei i postulatów zasygnalizowanych w literaturze przedmiotu:

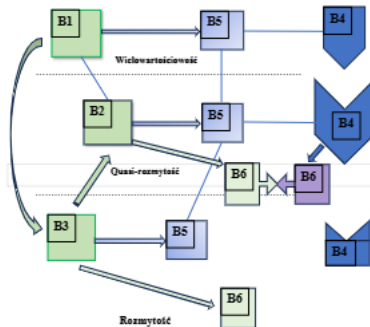
- 1 van Benthemowskiego postulatu opracowania wielosortowego systemu epistemicznej logiki akcji agenta wiedzonego zasada indukcji wstecznej na semantycznym drzewie gry z [D1], [D2] oraz [D3],
- 2 postulatu Schmidt i Venable z [D22], by wprowadzić rozmytość do opisu takich bytów jak akcje czy preferencje,
- 3 idei rozszerzenia Lindstrømowskiej charakteryzacji na logiki opisujące obiekty analityczne (obliczeniowe) z [D12].

Struktura Tematyczna Cyklu Publikacji



- ① B1. Wielowartościowe rozszerzenia logiki Halperna-Shohama i logiki Moszkowskiego i ich rozwłóknione modele
- ② B2. Reprezentacja i Modelowanie Quasi-Rozmytości: Niemalże Rozmyta Logika Akcji i Preferencji (AFLAP)
- ③ B3. Reprezentacja i Modelowanie Rozmytości w Systemach Logiki Rozmytej dla Całek i Splotów
- ④ B4. Wielowartościowość, Quasi-rozmytość i Rozmytość z Perspektywy Teorii Kategorii
- ⑤ B5. Wielowartościowość, Quasi-rozmytość i Rozmytość w Paradygmacie Logiczno-Kategorialnym
- ⑥ B6. Reprezentacja i Modelowanie Rozmytości w Logikach Adaptatywnych i Teorii Kategorii – Aplikacyjna strona zagadnienia.
- ⑦ B7. Próba porównawczej analizy paradygmatów

Struktura Organizacyjna Osiągnięcia



Rysunek: Wzajemna relacja między blokami tematycznymi osiągnięcia. Kolor zielony – paradygmat logiczny; kolor granatowy – paradygmat kategorialny; kolor niebieski – paradygmat logiczno-kategorialny

Umiejscowienie Osiągnięcia w Dyscyplinie/Dziedzinie:



Osiągnięcie przynależy do obszaru **podstaw nauk technicznych** ze szczególną wyróżnioną rolą *informatyki technicznej*. Wynika to z faktu, że:

- ① **punkt wyjścia** znajduje w zastanym przedmiotowym *status quo* w naukach technicznych (np. istnienie pewnych logik adaptatywnych dla opisu obwodów cyfrowych, fenomenów KR (preferencji, ograniczeń czasowych), całkowitej reprezentacji relacji rozmytych między interwałami, etc.)
- ② **celem** także pozostaje zakres przedmiotowy tych nauk, w zakresie:
 - dostarczenia nowych *metod/sposobów*(np. modelowania i reprezentacji badanych 3 fenomenów: W, Q-R, R) i uchwycenia ich *konceptualnych fundamentów* (np. poprzez zbadanie własności logik adaptatywnych
 - (częściowo także): poszerzenia obszaru zastosowań omawianych konstrukcji/obiektów/systemów.

B1. Wielowartościowe rozszerzenia logiki HS...

① Przedmiotowe *status quo*:

SITL

Niech p, q będą zmiennymi zdaniowymi, $p; q$ denotuje: ' p poprzedza q ', a *true*, *empty*, *skip* są pewnymi wyróżnionymi zmiennymi atomowymi. Wówczas (Uproszczona) Interwałowa Logika Temporalna (SITL) jest określona przez gramatykę:

$$\phi := p, q \mid \neg p \mid p \wedge q \mid p; q \mid \text{empty} \mid \text{true} \mid \text{skip} \mid X(p) \mid G_I(p) \quad (1)$$

$$F_I(p) \mid G_A(p) \mid F_A(p) \mid G_T(p) \mid F_T(p) \mid N(p) \quad (2)$$

gdzie $G_I(p)$ 'ogólnie w *inicjalnych* podinterwałach (zachodzi) p ', $F_I(p)$: 'możliwie w *inicjalnych* podinterwałach (zachodzi) p ', $G_T(p)$: 'ogólnie w *terminalnych* podinterwałach (zachodzi) p ', $F_T(p)$ – 'możliwie w *terminalnych* podinterwałach (zachodzi) p '. Para: $G_A(p)$, $F_A(p)$ reprezentuje podinterwały *pośrednie*, $N(p)$ denotuje wyrażenie: 'next p ', a $X(p)$ denotuje modalny operator dla relacji X , gdzie $X \in \{\text{begin, finish, halt, keep}\}$.

B1. Wielowartościowe rozszerzenia...



HS.

Niech zbiór $\{A, B, D, E, O, L\}$ jest zbiorem bazowych relacji Allenowskich między interwałami ('after', 'before', 'during', 'equivalent', 'overlap', 'later'). Syntaktyka zdaniowej logiki HS określona jest przez następującą gramatykę:

$$\phi := p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid \langle Y \rangle \phi \mid \langle \bar{Y} \rangle \phi,$$

gdzie p jest zmienna zdaniowa, $\langle Y \rangle \phi$ jest operatorem modalnym reprezentującym relacje Y ze zbioru relacji Allenowskich $\{A, B, D, E, O, L\}$, a $\langle \bar{Y} \rangle \phi$ denotuje modalny operator dla relacji odwrotnej do Y .

B1. Wielowartościowe rozszerzenia...



- 1 **Cel:** Wprowadzić wielowartościowość do HS oraz ITL zarówno do:
 - 1 syntaktyki tych rachunków, jak i
 - 2 semantyki tych rachunków,
- 2 Rozwinąć nową metodę modelowania takich hybrydowych rachunków
- 3 Poszerzyć istniejące standardowe obszary zastosowań (głównie poprzez rozszerzenie możliwości opisu i spectrum opisywanych sytuacji)

B1. Wielowartościowe rozszerzenia...

1 Rezultaty: (Paradygmat postępowania + syntaktyka)

- Ustal skończony zbiór, G , (wymiernych) α -parametrów wziętych ze zbioru $[0,1]$ (lub dowolnego zbioru mocy continuum po jego normalizacji) oraz skończony zbiór \mathcal{A} agentów.
- Określ następnie gramatykę nowego języka ze szczególnym uwzględnieniem α -parametryzowanych operatorów modalnych typu \Box - i \Diamond .
- Standardowo – zdefiniuj stosowny zbiór aksjomatów, reguł inferencyjnych i – stosownie do potrzeb – wzajemną współdefiniowalność operatorów modalnych nowo konstruowanego języka.

Elementy syntaktyki i założenia jej konstrukcji	MVDeo[A6]	MVer[A3,A4]
Gramatyka/język:	$\phi := p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid O_i^\alpha \phi \mid P_i^\alpha \phi$	$\phi := p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid [V]_i^\alpha \phi \mid \langle V \rangle_i^\alpha \phi$
Założenia konstrukcji:	Niepusty zbiór i -agentów \mathcal{A} , skończony zbiór α -parametrów $G \subset [0, 1]$	Niepusty zbiór i -agentów \mathcal{A} , skończony zbiór α -parametrów $G \subset [0, 1]$
Przyjmowane definicje:	$O_i^\alpha \phi \iff \neg P_i^\alpha \neg\phi$, dla każdego $\alpha \in G$	$\langle V \rangle_i^\alpha \phi \iff \neg [V]_i^\alpha \neg\phi$, dla każdego $\alpha \in G$
Aksjomatyka:	1. Wszystkie aksjomaty rachunku zdań, 2. $O_i^\alpha(\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (O_i^\alpha\phi \rightarrow O_i^\alpha\chi)$, (aksjomat K) 3. $O_i^\alpha\phi \rightarrow O_i^\alpha O_i^\alpha\phi$, (aksjomat 4) 4. $O_i^\alpha\phi \rightarrow \phi$, (aksjomat T)	1. Wszystkie aksjomaty rachunku zdań, 2. $[V]_i^\alpha(\phi \rightarrow \chi) \rightarrow ([V]_i^\alpha\phi \rightarrow [V]_i^\alpha\chi)$, (aksjomat K) 3. $[V]_i^\alpha\phi \rightarrow [V]_i^\alpha[V]_i^\alpha\phi$, (aksjomat 4) 4. $[V]_i^\alpha\phi \rightarrow \phi$, (aksjomat T)
Reguły Inferencyjne:	Modus Ponens, reguła podstawiania, oraz reguła ukonieczniania dla operatora O_i^α : $\frac{\phi}{O_i^\alpha\phi}, \quad \alpha \in G \subset [0, 1].$	Modus Ponens, reguła podstawiania, reguła ukonieczniania dla operatora $[V]_i^\alpha$: $\frac{\phi}{[V]_i^\alpha\phi}, \quad \alpha \in G \subset [0, 1].$

B1. Wielowartościowe rozszerzenia...



1 Rezultaty: (Paradygmat postępowania + semantyka)

Niech S będzie początkowym rezerwuarem (zbiorem) skończonych interwałów $I = s_1 s_2 \dots s_k \in S$ oraz $I' = s'_1 s'_2 \dots s'_l \in S$, dla pewnych k, l . Ustalmy agenta $i \in \mathcal{A}$. Niech $l_i(s_j) = l_i(s'_j)$ oznacza, że lokalne stany s_j oraz s'_j są epistemicznie nierozróżnialne przez agenta i aż dla każdego $j < k$. Definiujemy teraz nową relację osiągalności $\sim_i^{\alpha} \subseteq S \times S$ pomiędzy interwałami I oraz I' następująco:

$$I \sim_i^{\alpha} I' \iff \text{length}(k) \leq \text{length}(l) \text{ oraz } l_i(s_j) = l_i(s'_j) \text{ dla wszystkich } j < k, \quad (2)$$

tzn. agent i nie jest zdolny rozróżnić odpowiednich stanów interwałów I oraz I' aż do stanu j (odpowiednich j -prefiksów obu interwałów. Relacja \sim_i^{α} zostaje wyspecyfikowana do nowej α -parametryzowanej relacji \sim_i^{α} przy pomocy pewnej technicznej funkcji $\|\bullet\| : S \times S \times \mathcal{A} \mapsto G$, która przyporządkowuje relacji \sim_i jakąś wymierną wartość $\alpha \in [0, 1]$. Pozwala to wprowadzić nową relację określoną na produkcie $S \times S \times \mathcal{A} \times G$ w sposób następujący:

$$I \sim_i^{\alpha} I' \iff \text{length}(I) \leq \text{length}(I') \text{ oraz } \|I \sim_i I'\| = \alpha \in [0, 1]. \quad (3)$$

Pozwala to zdefiniować *relacyjny model interwałowy Kripkego* (tu: dla MVer) jako strukturę postaci:

$$M = \langle S, \sim_i^{\alpha}, h \rangle, \quad (4)$$

gdzie $S \neq \emptyset$, \sim_i^{α} jest określoną powyżej relacją osiągalności $S \times S \times \mathcal{A}$, a $h : \mathcal{L}(MVer) \rightarrow 2^S$ jest funkcją wartościowania. Prowadzi to także do następującej definicji spełniania dla operatorów modalnych (tu: MVer):

1. $M, I \models [V]_i^{\alpha} \phi$, gdzie $i \in \mathcal{A}$, iff dla wszystkich $I' \sim_i^{\alpha} I$ mamy $M, I' \models \phi$ dla każdego $\alpha \in G$.
2. $M, I \models \langle V \rangle_i^{\alpha} \phi$, gdzie $i \in \mathcal{A}$, iff istnieje I' takie, że $I \sim_i^{\alpha} I'$ oraz $M, I' \models \phi$ dla każdego $\alpha \in G$.

B1. Wielowartościowe rozszerzenia...



1 Rezultaty: (Modele Rozwłóknione-jako nowa Metoda Semantycznego Modelowania)

1. Ustal jakiś wyjściowy interwał, powiedzmy I_1 , z uniwersum S modelu \mathcal{M}_1 ,
2. Znajdź jakiś model, \mathcal{M}_2 , zdolny 'rozpoznać' $\Box\psi$ jako operator modalny.
3. Przyporządkuj teraz I_1 parę (\mathcal{M}_2^I, I_2) , dla dowolnie obranego $I_2 \in \mathcal{M}_2^I$ (oznacz model \mathcal{M}_2^I przez I_1) i przyjmij warunek warunkowej spełnialności:

$$(\mathcal{M}_1, I_1) \models \Box\psi \iff (\mathcal{M}_2^I, I_2) \models \Box\psi. \quad (5)$$

4. Znalazłszy inne modele \mathcal{M}_i , dla $i \in \{3, \dots, k\}$ o tej samej własności, co \mathcal{M}_2 , oznacz je interwałem I_1 i ustal odziorowanie rozwałókniające $F: I_1 \rightarrow \bigcup_{i=2}^k (\mathcal{M}_i, I_i)$, dla pewnego naturalnego k , respektujące nową (warunkową) spełnialność dla $\Box\psi$ w modelu \mathcal{M}_1 :

$$(\mathcal{M}_1, I_1) \models \Box\psi \iff \forall_{i \leq k} (\mathcal{M}_i^I, I_i \models \Box\psi). \quad (6)$$

B.2. Reprezentacja i Modelowanie Quasi-Rozmytości: Niemałe Rozmyta Logika Akcji i Preferencji (AFLAP)



1 Wyjściowe *status quo*/pretekst:

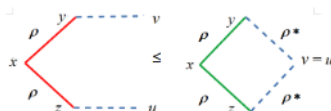


Figure 4: The confluence property (left) *versus* Church-Rosser (right) property in terms of ρ and ρ^* relations. Both pictures represent a simple game tree with a root x and nodes y, z . On the left, we deal with a confluence property as the terminal nodes v, u are comparable in the sense of \leq . In the right picture, the confluence is simplified to the trivial case, as $v = u$.

BI_{strategy}: No alternative move for the current player i guarantees outcomes *via* further play using ρ that are all strictly better for i than the outcomes resulting from starting at the current move and then playing ρ all the way down the tree.

B.2. Reprezentacja i Modelowanie Quasi-Rozmytości: Niemałże Rozmyta Logika Akcji i Preferencji (AFLAP)



- ① Cel:
 - ① Wprowadzić sposób reprezentacji i modelowania quasi-rozmytości
- ② Realizacja celu:
 - ① wprowadzenie logiki AFLAP i jej quasi-modeli
 - ② na paradygmatycznym przykładzie zachowania agenta na drzewie gry z ruchem opisanym indukcją wsteczną (BI)

B.2. Reprezentacja i Modelowanie Quasi-Rozmytości: Niemalże Rozmyta Logika Akcji i Preferencji (AFLAP)

1 Rezultaty:

Własność AFLAP:	Postać własności:
Gramatyka AFLAP:	$\phi := p[\text{turn}_i \mid \text{end} \mid \phi \wedge \phi \mid \neg\phi \mid \langle \text{move} \rangle^{<\varepsilon} \phi \mid \langle \text{BI} \rangle^{<\varepsilon} \phi \mid \Diamond_i^{\leq} \phi$
Przyjmowane definicje:	Def. 1 $\langle \text{move} \rangle^{<\varepsilon} \phi := \neg[\text{move}]^{<\varepsilon} \neg\phi$, Def. 2 $\langle \text{BI} \rangle^{<\varepsilon} \phi := \neg[\text{BI}]^{<\varepsilon} \neg\phi$, Def. 3 $\Diamond_i^{\leq} \phi := \neg\Box_i \neg\phi$, dla każdego $i \in I$.
Aksjomatyka (dla pojedynczych operatorów modalnych):	<ul style="list-style-type: none"> • aksjomaty K, T oraz 4 dla preferencji w terminach operatora \Box_i^{\leq} (\Diamond_i^{\leq}-operatora), • aksjomaty K oraz GL dla opisu ε-relacji $\text{BI}^{<\varepsilon}$, oraz • aksjomaty K, T oraz 5 dla opisu ε-relacji $\text{Move}^{<\varepsilon}$.
Dodatkowe aksjomaty (dla mieszanych operatorów modalnych):	ChRoss $^{<\varepsilon}$: $\langle \text{BI} \rangle^{<\varepsilon} [\text{Move}]^{<\varepsilon} \phi \rightarrow [\text{Move}]^{<\varepsilon} \langle \text{BI} \rangle^{<\varepsilon} \phi$ com $_{\text{BI}, \text{Move}}^l$: $\langle \text{BI} \rangle^{<\varepsilon} \langle \text{Move} \rangle^{<\varepsilon} \phi \rightarrow \langle \text{Move} \rangle^{<\varepsilon} \langle \text{BI} \rangle^{<\varepsilon} \phi$, com $_{\text{BI}, \text{Move}}^r$: $\langle \text{Move} \rangle^{<\varepsilon} \langle \text{BI} \rangle^{<\varepsilon} \phi \rightarrow \langle \text{BI} \rangle^{<\varepsilon} \langle \text{Move} \rangle^{<\varepsilon} \phi$.
Reguły Referencyjne:	N $_1$: $\frac{\phi \rightarrow \psi}{\Box_i^{\leq} \phi \rightarrow \Box_i^{\leq} \psi}$, dla każdego $i \in I$, N $_2$: $\frac{\phi \rightarrow \psi}{[\text{BI}]^{<\varepsilon} \phi \rightarrow [\text{BI}]^{<\varepsilon} \psi}$, dla każdego $\varepsilon > 0$, N $_3$: $\frac{\phi \rightarrow \psi}{[\text{Move}]^{<\varepsilon} \phi \rightarrow [\text{Move}]^{<\varepsilon} \psi}$, dla każdego $\varepsilon > 0$.

B.2. Reprezentacja i Modelowanie Quasi-Rozmytości: Niemalże Rozmyta Logika Akcji i Preferencji(AFLAP)



1 Rezultaty:

Definicja 4 ((Niemalże) rozmyta relacja $Move(u, v)$.) Rozważmy nieskończony ciąg $\{Move_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ relacji przechodnich, zwrotnych i symetrycznych oraz załóżmy, że dla wszystkich $u \in U$, istnieje takie $v \in U$ że $Move_n(u, v)$ jest definiowane dla każdego n . Jeśli ciąg ten spełnia następujący warunek:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \forall n \geq k (1 - e(Move_n(u, v))) < \varepsilon,$$

wówczas granica ciągu $\{Move_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ jest nazywana (niemalże)rozmytą $Move(u, v)$ relacją i oznaczana przez $Move^{<\varepsilon}(u, v)$ dla wszystkich wierzchołków $u, v \in U - \{r\}$. (Przypadek $\varepsilon > 0$) Jeśli $\varepsilon = 0$, wówczas konstatujemy $Move^{<\varepsilon}(u, v) = Move(u, v)^0 = Move(u, v)$. \square

B.2. Reprezentacja i Modelowanie Quasi-Rozmytości: Niemalże Rozmyta Logika Akcji i Preferencji(AFLAP)



AGH

www.agh.edu.pl

Konstrukcja kandydatów na quasi-stany:

- 1 Powstają z wyjściowej struktury $\mathcal{F} \times \mathcal{B}$ jako struktura $\langle \mathcal{F}, \mathbf{f} \rangle$.
- 2 Element \mathbf{f} przechowuje 'wiedzę' o strukturze \mathcal{F} jako zbiór 'kawałków' postaci $\mathbf{f}(w)$, dla $w \in W$ z \mathcal{F} .
- 3 Jeśli $\mathcal{B} = \langle \Delta, R \rangle$, to przyjmuje on postać $\mathbf{f}(w) = \langle \Delta_w, R_w \rangle$.

Konstrukcja quasi-stanów:

- 1 *Quasi-stany* otrzymywane są z kandydatów na quasi-stany i mają wyjściową postać $\mathbf{q}(w) = \langle T_w, <_w \rangle$, gdzie T_w , dla każdego $w \in W$, jest udrzewieniem dziedziny Δ_w .
- 2 Każdy $\mathbf{q}(w)$ – kodujący $\mathbf{f}(w)$ – wymaga finityzacji- np.przez dołączenie skończonego zbioru formuł \mathbf{t}_w , $w \in W$:

$$\mathbf{t}_w(x) = \left\{ \psi \in fl(\phi) : (M, \langle w, x \rangle) \models \psi \right\}.$$

- 3 Finalnie, $\mathbf{q}(w) = \langle \langle T_w, <_w \rangle, \mathbf{t}_w \rangle$, dla każdego $w \in W$.

B.2. Reprezentacja i Modelowanie Quasi-Rozmytości: Niemałe Romyta Logika Akcji i Preferencji(AFLAP)



www.agh.edu.pl

Konstrukcja Quasi-modeli przez Przebiegi

- 1 Quasi-model powstaje z pary $\langle \mathcal{F}, \mathbf{q} \rangle$ jako jej *struktury bazowe*,
- 2 Brakującym elementem jest zbiór tzw. *funkcji przebiegów (runs)*.
- 3 Dla $\langle \mathcal{F}, \mathbf{q} \rangle$ modelującej ϕ o skończonej głębokości (*depth*) m , przez k -przebieg, dla $k < m$ rozumiemy funkcję r , która dla każdego $w \in W$ zwraca punkt $r(w) \in T_w$ o tej samej współgłębokości (*co-depth*) k .
- 4 Na skończony zbiór $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_0, \dots, \mathcal{R}_m)$ takich k -przebiegów, dla $1 \leq k \leq m$, nakłada się dodatkowe warunki, zapewniające operacyjną stosowalność i dobre zdefiniowanie tego zbioru:
 1. Zbiór \mathcal{R}_0 zawiera przebiegi, które każdemu $w \in W$ przyporządkowują korzeń drzewa T_w .
 2. $\forall r' \in \mathcal{R}_{k+1} \exists r \in \mathcal{R}_k (r <_w r')$.
 3. $\forall r' \in \mathcal{R}_{k+1}, w \in W$ z $r(w) <_w x$ istnieje takie $r \in \mathcal{R}_k$, by $x = r'(w)$ oraz $r(w) <_w r'(w)$.

B.2. Reprezentacja i Modelowanie Quasi-Rozmytości: Niemałe Romyta Logika Akcji i Preferencji(AFLAP)



www.agh.edu.pl

Warunki Saturacji i Koherencji

- 1 Dla modalnych operatorów z \mathcal{L}^2 , formułuje się warunki *nasycenia i koherencji* zapewniające spełnienie warunków prawdziwości dla formuł modalnych w interpretowanych strukturach.
- 2 Jeśli \diamond, \blacklozenge sa operatorami \mathcal{L}^2 , \diamond jest interpretowany w $\mathbf{q} = \langle T_w, <_w \rangle$, a \blacklozenge – w strukturze $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, wówczas warunki te:

$$\begin{aligned} \diamond\text{-saturacja i koherencja:} \quad & \forall x \in T_w \forall \psi \in \mathcal{F}(\phi) \left(\diamond\psi \in \mathbf{t}(x) \iff \right. \\ & \left. \exists y \in T_w (x <_w y \rightarrow \psi \in \mathbf{t}(y)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r\text{-saturacja i koherencja:} \quad & \forall w \in W \forall \psi \in \mathcal{F}(\phi) \left(\blacklozenge\phi \in \mathbf{t}(r(w)) \iff \right. \\ & \left. \exists v \in W (w R v \wedge \phi \in \mathbf{t}(r(v))) \right). \end{aligned}$$

- 3 Struktura $QM = \langle \mathcal{F}, \mathbf{q}, \mathcal{R}, < \rangle$, spełniająca powyższe warunki, stanowi żądany *quasi-model*.

B2. Reprezentacja i Modelowanie Quasi-Rozmytości: Niemalże Rozmyta Logika Akcji i Preferencji(AFLAP)

1 Rezultaty (Quasi-Model dla AFLAP):

	Postać:	Własności:
Kandydaci na quasi-stan	$\langle T, <_{Move<e} \rangle \rangle$	<ul style="list-style-type: none"> $\langle T, <_{Move<e} \rangle$ jest nieskończonym drzewem nieprzechodnim, $<_{Move<e}$ jest relacją taką, że relacja $Move^{<e}$ z modelu $GL_{BI}^{<e} \times S5_{Move^{<e}}$ jest jej symetrycznym, zwrotnym i przechodnim domknięciem.
Quasi-stany	$\langle T, <_{Move<e} \rangle, \mathbf{t} \rangle$	<p>co₁: Quasi-stany $\langle T, <_{Move<e} \rangle, \mathbf{t} \rangle$ oraz $\langle T', <_{Move^{<e}'} \rangle, \mathbf{t}' \rangle$ są izomorficzne, jeśli tylko istnieje izomorfizm f grafów $\langle T', <_{Move^{<e}'} \rangle$ oraz $\langle T, <_{Move<e} \rangle$ taki, że $\mathbf{t}(x) = \mathbf{t}'(f(x))$, dla każdego $x \in T$.</p> <p>(Move)^{<e}-saturacja:</p> $\forall x \in T \forall (Move)^{<e} \phi \in FL(\phi) \left((Move)^{<e} \psi \in \mathbf{t}(x) \leftrightarrow \exists y \in T (x <_{Move^{<e}} y \rightarrow \psi \in \mathbf{t}(y)) \right)$
Przebiegi	$r^k(w) = \{x \in T_w : dp(x) = k\}$, $w \in W$, $k < m$.	<p>r-koherencja: $\forall w \in W \forall (BI)^{<e} \phi \in FL(\phi) \left(\exists v \in W (w BI^{<e} v \wedge \phi \in \mathbf{t}_w(r(v))) \rightarrow \langle BI \rangle^{<e} \phi \in \mathbf{t}_w(r(w)) \right)$.</p> <p>r-saturacja: $\forall w \in W \forall (BI)^{<e} \phi \in FL(\phi) \left((BI)^{<e} \phi \in \mathbf{t}_w(r(w)) \rightarrow \exists v \in W (w BI^{<e} v \wedge \phi \in \mathbf{t}_w(r(v))) \right)$.</p>
Zbiory przebiegów	$\mathcal{R} = (\mathcal{R}_0, \dots, \mathcal{R}_k)$, $k < m$	<p>req₁: Dla każdego $x \in T^w$, można znaleźć taki przebieg r, że $x = r(w)$ dla danego w (żaden typ nie jest ominięty przez przebieg).</p> <p>req₂: Dla wszystkich $w \in W$, $\mathcal{R}_0 \neq \emptyset$, przebiegu $r \in \mathcal{R}^{AFLAP}$ oraz $x \in T^w$: jeśli $r(w) <_{Move^{<e}} x$ (odpowiednio: $x <_{(Move)^{<e}} r(w)$), wtedy istnieje taki $r' \in \mathcal{R}^{AFLAP}$, że $r'(w) = x$ oraz $r(w) < r'(w)$ (odpowiednio: $r'(w) < r(w)$), dla każdego $w \in W$.</p> <p>req₃ (def. <): Dla wszystkich $r, r' \in \mathcal{R} : r < r'$ iff $\forall w \in W, r(w) <_{Move^{<e}} r'(w)$.</p>
Quasi-model	$\langle \mathcal{F}, \mathbf{q}, \mathcal{R}, < \rangle$	Wszystkie opisane powyżej własności

B2. Reprezentacja i Modelowanie Quasi-Rozmytości: Niemalże Rozmyta Logika Akcji i Preferencji (AFLAP)

1 Rezultaty (Twierdzenia):

Główny Lemat 1 *Formuła ϕ języka MC^2 (AFLAP) jest spełnialna w strukturze produktowej $\mathcal{F} \times \mathcal{B} \iff$ istnieje $GL_{BI} \Leftarrow \times SS_{Mose} \Leftarrow$ quasi-model dla ϕ bazujący na \mathcal{F} .*

Dowód przebiega przez indukcję po konstrukcji formuły $\psi \in FI(\phi)$, choć jest bardziej złożony niż w przypadkach multimodalnych ze względu na nowe definicje ε -owych relacji i nowe warunki ich spełniania. Udaje się ponadto znaleźć quasi-model od rozmiarze efektywnie ograniczonym wielkością zależną od długością formuły ϕ .

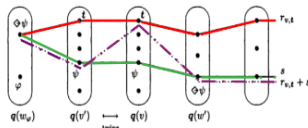
Lemma 1. *Dla każdej $GL_{BI} \Leftarrow \times SS_{Mose} \Leftarrow$ spełnialnej formuły ϕ , istnieje quasi-model, którego rozmiar jest efektywnie ograniczony zależnie od długości ϕ .*

Fakt ten pokazany został przez obrócenie dodatkowego $s \in \mathcal{R}'$, który zgadza się z r_k w w_ϕ , tj., $r_k(w_\phi) = s(w_\phi)$ (patrz: Rys. 1) i rozważenie przebiegu $r_k + s$:

$$(r_k + s)(w) \begin{cases} \mathbf{t} \text{ jeśli } w = v, \\ s(w) \text{ w innym przypadku.} \end{cases}$$

Wystarczy pokazać, że nowa funkcja $r_k + s$ przechodzi wszystkie typy w $\langle W', \mathbf{q}' \rangle$, tzn., że \mathcal{R}' jest zbiorem przebiegów nasyconych i koherentnych, czyli spełniającym warunek:

$$\text{coh-sat}_{BI \Leftarrow}: \quad (BI) \Leftarrow \psi \in \mathbf{t}(r_k + s)(w) \iff \exists_{w' \in W} (wBI \Leftarrow w' \wedge \phi \in \mathbf{t}(r_k + s)(w')).$$



Rysunek 2. Przykładowa konstrukcja quasi-modelu z użyciem 'bliźniąt' i zmodyfikowanej definicji przebiegów Zakharyashev2003, p. 243. Przerzywana linia wyznacza nowy 'sumaryczny' przebieg $r_{k,s} + s$, a $q(v)$ jest kopią ('bliźniakiem') $q(v)$.

B2. Reprezentacja i Modelowanie Quasi-Rozmytości: Niemałże Rozmyta Logika Akcji i Preferencji(AFLAP)



1 Obszary zastosowań:(weryfikacja modelowa)

Algorithm 1 Procedure $VERIFY(M, w, \phi, +, \epsilon)$, where
 $+= \{<, BT_1^{<}, \dots, BT_n^{<}, Move_1^{<}, \dots, Move_n^{<}, Val\}$, $i \in I, n \in \{1, \dots, N\}, \epsilon \in \{a_1, \dots, a_i\}$, a_i

```

1: for all  $\beta \in Sub(a)$  such that  $|\beta| = i$  do
2:   while
3:      $\beta = \langle \rangle_i$ 
4:     for every  $w \in M, i \in I$  do
5:       if  $\exists v. w <_v v \wedge \gamma \in V(v)$  then
6:         set :=  $Val(w) = Val(w) \cup \{\beta\}$  and  $VERIFY(M, v, +, \gamma, \epsilon)$ 
7:         return true
8:       end if
9:       return false
10:    end while
11:   while
12:      $\beta = \langle BT \rangle^{<} \gamma$ 
13:     for every  $w \in M, n \in \{1, \dots, N\}, \epsilon \in \{a_1, \dots, a_i\}$  do
14:       if  $\exists k. \forall n \geq k \exists_{a \in W} (w BT^{<} a) \wedge \gamma \in V(a)$  then
15:         set :=  $Val(w) = Val(w) \cup \{\beta\}$  and  $VERIFY(M, w, +, \gamma, \epsilon)$  and
16:         return true
17:       end if
18:       return false
19:     end while
20:   ....
21: end for

```

Rysunek 8. Algorytmy weryfikacji modelowej dla logiki AFLAP

B2. Reprezentacja i Modelowanie Quasi-Rozmytości: Niemalże Rozmyta Logika Akcji i Preferencji(AFLAP)



1 Obszary zastosowań:(automatyzacja rozumowań)

```

1 FUZZBIcheck<-function(e,check,x=1){
2   while(x>1){
3     next.val=abs(1-e(x))
4     x=x+1
5   }
6   next.val=abs(1-e(1))
7   check=function(x,p){
8     for(i in 1:100)
9       sum(length(x),length(p))
10    if (sum(length(x),length(p))> 10*p)
11      {cat("BI_epsilon does not exists")}
12    else{cat("BI_epsilon exists")}
13  }
14  A = function(e,x=1){
15    for(i in 1:100)
16      A= abs(1-e(i))
17  }
18  return(list("A1"=abs(1-e(1)), "A2"=abs(1-e(2)),
19            "A100"=abs(1-e(100)), "check"=check(A,0.001) })
20  e=function(x){2*atan(x)/3.14}
21  print(FUZZBIcheck(e, check(A,0.001), x=1))

```

```

> r na(n.f
BI_epsilon does not exists$A1
[1] 0.4997464
$A2
[1] 0.2940997
$A100
[1] 0.005862
$check
NULL

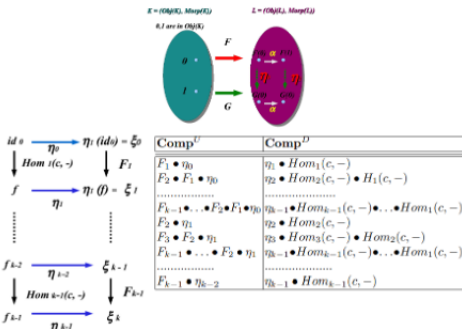
```

Rysunek 10. Kod definiujący funkcję **FUZZBIcheck** dla wyjściowej funkcji $f(x) = \frac{2\arctan(x)}{\pi}$ (lewa strona) oraz uzyskane rezultaty po przywołaniu tej funkcji (strona prawa).

B4. Wielwartościowość, Quasi-Rozmytość i Rozmytość z Perspektywy Teorii Kategorii



1 Wyjściowa Sytuacja Badawcza:



Rysunek 4. Góra: Transformacja naturalna $\eta = (\eta_0, \eta_1)$ pomiędzy funktorami F oraz G z kategorii K w kategorię L . [A5] Dół: Ilustracja multi-diagramu opartego na transformacji naturalnej jako k -rotce $(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{k-1})$. Każdy komponent η_i operuje między funktorem $Hom_i(c, -)$ oraz funktorem F_i , dla $i = 1, \dots, k-1$. (Por. [A7]).

B4. Wielowartościowość, Quasi-Rozmytość i Rozmytość z Perspektywy Teorii Kategorii



1 Sposoby Uchwycenia Zagadnienia:

Rozmyta transformacja naturalna [A5],[A7]	Transformacja z niemalże rozmytą komutatywnością [A10].
<p>Wejście: skończony ciąg kategorii C_i z korespondującymi ciągami funktorów $\{F_i\}_{i=1}^{k-1}$ and $\{G_i\}_{i=1}^{k-1}$ między kategoriami, dla $i = 1, 2, \dots, k$, dla pewnego skończonego k.</p> <p>Założenia: Dla każdego obiektu $X \in C_i$, przyporządkowane jest odwzorowanie $\eta_i^X : F_i(X) \rightarrow G_i(X)$ in C_{i+1} (stanowi ono i-komponent transformacji naturalnej η_X.)</p> <p>Wyjście: zachodzi następujący warunek rozmytej komutatywności:</p> $\eta_k^X \bullet (F_k \bullet \dots \bullet F_1(f)) \subset (G_k \bullet \dots \bullet G_1(f)) \bullet \eta_1^X,$ <p>a otrzymany w ten sposób zbiór różnicowy A ma jedną z własności:</p> <ol style="list-style-type: none"> $\text{card}(A) < \infty$, A jest przeliczalny, A jest nieprzeliczalny. 	<p>Wejście: skończony ciąg kategorii C_i z korespondującymi ciągami funktorów $\{F_i\}_{i=1}^{k-1}$ and $\{G_i\}_{i=1}^{k-1}$ między kategoriami, dla $i = 1, 2, \dots, k$, dla pewnego skończonego k.</p> <p>Założenia: Dla każdego obiektu $X \in C_i$, przyporządkowane jest odwzorowanie $\eta_i^X : F_i(X) \rightarrow G_i(X)$ w C_{i+1} (stanowi ono i-komponent transformacji naturalnej η_X.)</p> <p>Wyjście: zachodzi następujący warunek rozmytej komutatywności:</p> $\eta_k^X \bullet (F_k \bullet \dots \bullet F_1(f)) \Delta (G_k \bullet \dots \bullet G_1(f)) \bullet \eta_1^X \in \text{fin},$ <p>gdzie 'fin' oznacza klasę wszystkich zbiorów skończonych (zadanej przestrzeni, uniwersum, dziedziny, etc.).</p>

B4. Wielowartościowość, Quasi-Rozmytość i Rozmytość z Perspektywy Teorii Kategorii

1 Rezultaty (Warstwa Konceptualna):

	Kule k-podobieństwa	Abstrakcyjne kule k-podobieństwa
Definicje	<p>Założenia:</p> <ul style="list-style-type: none"> dowolne $A \subset \mathcal{P}^{Comp}(\omega)$, k – całkowite nieujemne. <p>Kulę k-podobieństwa o środku A oraz promieniu k stanowi zbiór</p> $B_k(A) := \{B \in \mathcal{P}^{Comp}(\omega) : A \Delta B \leq k\}$	<p>Założenia:</p> <ul style="list-style-type: none"> $\{\emptyset\}_{fin} \in \mathcal{P}^{Comp}(\omega)/fin$, \sim_{fin} – relacja równoważności, \simeq – kongruencja na $\{\emptyset\}_{\sim_{na}}$, k całkowite nieujemne <p>Abstrakcyjna kula k-podobieństwa o środku w $[A]_{\simeq}$ i nieujemnym promieniu k jest zbiorem $B([A]_{\simeq}, k)$, definiowanym jak poniżej:</p> $B_k([A]_{\simeq}) = \left\{ [B]_{\simeq} \in \{\emptyset\}_{\sim_{na}} : [A]_{\simeq} \leq_{\star}^{<k} [B]_{\simeq} \right\}$ $= \left\{ [B]_{\simeq} \in \{\emptyset\}_{\sim_{na}} : \forall C \in [A]_{\simeq} \forall D \in [B]_{\simeq} \text{card}(C/D) \leq k \right\}.$
Operacje	<p>Dla dowolnych $A, B \in \mathcal{P}^{Comp}(\omega)$ i dowolnego, lecz ustalonego naturalnego k, definiujemy:</p> $A \leq_{\star}^{<k} B \iff \text{card}(A/B) \leq k,$ $A \leq_{\star}^{<k} B \iff \text{card}(A/B) \leq k \text{ and } \text{card}(B/A) > k,$ $A =_{\star}^{<k} B \iff A \leq_{\star}^{<k} B, \text{ and } B \leq_{\star}^{<k} A.$	<ol style="list-style-type: none"> $[A]_{\simeq} \leq_{\star}^{<k} [B]_{\simeq} \iff \forall C \in [A]_{\simeq} \forall D \in [B]_{\simeq} (C \leq_{\star}^{<k} D \wedge D \leq_{\star}^{<k} C).$ $[A]_{\simeq} \leq_{\star}^{<k} [B]_{\simeq} \iff \forall C \in [A]_{\simeq} \forall D \in [B]_{\simeq} (C \leq_{\star}^{<k} D).$ $[A]_{\simeq} \leq_{\star}^{<k} [B]_{\simeq} \iff \forall C \in [A]_{\simeq} \forall D \in [B]_{\simeq} (C \leq_{\star}^{<k} D).$
Tezy	$B_{k-1}(A)$ nie jest kulą k multi-podobieństwa (dla żadnego $A \subset \mathcal{P}^{Comp}(\omega)$.)	Dla żadnego $[A]_{\simeq} \in \{\emptyset\}_{\sim_{na}}$, abstrakcyjna kula $B_{k-1}([A]_{\simeq})$ ($(k-1)$ -podobieństwa nie jest kulą k -podobieństwa.

B4. Wielowartościowość, Quasi-Rozmytość i Rozmytość z Perspektywy Teorii Kategorii



1 Rezultaty (Zastosowania-Automatyzacja):

```
> FIN_cont<-function(x,y,p){
>   if (length(symdiff(x,y))<=p){
>     cat("x and y belong to FINp")}
>   else{cat("x and y do not belong to FINp")}
> }
```

FIGURE 6. R code for FIN_cont function

```
> BALL_cont3<-function(x,y,z,p){
>   for (i in 1:3)
>     for (j in 1:3)
>       for (k in 1:3)
>         sum(length(abs(x[i]-y[j]))
>           + length(abs(y[j]-z[k])), length(abs(x[i]-z[k]))))
>   if (sum(length(abs(x[i]-y[j]))
>     + length(abs(y[j]-z[k])), length(abs(x[i]-z[k]))> 3**p))
>     { cat("classes x, y and z do not belong to pBall") }
>   else { cat("classes x,y and z belong to pBall") }
> }
```

FIGURE 6. R code for BALL_cont3 function

```
> FIN_cont<-function(x,y,p){
+ if (length(symdiff(x,y))<=p){
+   cat("x and y belong to FINp")}
+ else{
+   cat("x and y do not belong to FINp")}
+ }
> FIN_cont(A,B, p =3)
x and y do not belong to FINp
> A<-c(1,4,3,5,6,8,9)
> B<-c(1,4,6,9,0)
> FIN_cont(A,B, p =3)
x and y do not belong to FINp
> symdiff(A,B)
[1] 3 5 8 0
> }
```

FIGURE 7. An exemplary R-code application for 2-argumental FIN_cont function.

```
> BALL_cont2<-function(x,y,p){
+ if (sum(length(abs(A-B))<=2**p))
+   cat("x and y belong to pBall")}
+ else{"x and y do not belong to pBall"}
> BALL_cont2(A,B,4)
x and y belong to pBall
```

FIGURE 8. An exemplary R-code application for 2-argumental BALL_cont2 function.

Rysunek 11. Zestawienie przykładowych R-kodów dla funkcji FINcont oraz BALL.cont3, wraz z uzyskanymi wynikami dla zadanych elementarnych przykładów zbiorów zadanych przez ciągi elementów (po prawej).

B3. Reprezentacja i Modelowanie Rozmytości w Systemach Logiki Rozmytej dla Catek i Splotów



- ① **Cel:**
 - ① **Znaleźć sposoby modelowania i reprezentacji dla silnych* systemów logik adaptatywnych z pełną rozmytością** poprzez:
 - ① Konstrukcje logik dla catek i splotów (HLI, HLIC)
 - ② Konstrukcje ich modeli
 - ③ Ujęcie ich jako tzw. logik abstrakcyjnych i ich Lindstrømowską charakteryzację
 - ④ Wskazanie ścieżki od konstrukcji tych systemów do konstrukcji baz wiedzy

B3. Reprezentacja i Modelowanie Rozmytości w Systemach Logiki Rozmytej dla Całek i Splotów

1 Rezultaty:

Składowe	Hajkowa Logika Całkowa (HLI)	Hajkowa Logika Splotów (HLIC)
Zbiór formuł/ Język	<p>Formuły Atomowe^L: $\phi ::= \phi \neg \phi \phi \vee \psi$ $\psi \phi \wedge \psi \phi \wedge \psi \phi \& \psi$</p> <p>Quantyfikatory^L: $\forall x \phi \int \phi dx$</p> <p>Formuły Kwantyfikatorowe $\exists^* ::=$ $\forall x \phi - \forall x \psi \int \phi dx - \int \psi dy$.</p>	$Fm_0 = \{ \phi_i, \phi_{x_i}, \chi_i, \chi_{x_i}, \dots \}$ $Fm_{11} = Fm_0 \cup \{ \neg \alpha : \alpha \in Fm_0 \} \cup \{ \alpha \rightarrow \beta : \alpha, \beta \in Fm_0 \}$ $\cup \{ \alpha \wedge \beta : \alpha, \beta \in Fm_0 \} \cup \{ \alpha \& \beta : \alpha, \beta \in Fm_0 \}$ $\cup \{ \rho(\alpha_i \bullet \beta_{x_i}), \rho(\alpha_i \oplus \beta_{x_i}) : \alpha_i, \beta_{x_i} \in Fm_0 \}$ $\cup \{ \int \rho(\alpha_i \bullet \beta_{x_i}) dt : \alpha_i, \beta_{x_i} \in Fm_0 \}$ $Fm_{12} = Fm_{11} \cup \{ \int \rho(\alpha_i \bullet \beta_{x_i}) dt := \int \rho(\gamma_i \bullet \delta_{x_i}) dt : \alpha_i, \gamma_i, \beta_{x_i}, \delta_{x_i} \in Fm_0 \}$
Aksjomatyka	<ul style="list-style-type: none"> Aksjomaty Całkowe ([D9], p. 230): <p>($\mu 1$) $\int v dx \equiv v$ dla v niezawierającego zmiennej wolnej x,</p> <p>($\mu 2$) $\int (-\psi) dx \equiv - \int \psi dx$,</p> <p>($\mu 3$) $\int (\phi \rightarrow \psi) dx \equiv \int \phi dx \rightarrow \int \psi dx$,</p> <p>($\mu 4$) $\int (\phi \vee \psi) dx \equiv (\int \phi dx \rightarrow \int \psi dx) \rightarrow \int (\phi \& \psi) dx \rightarrow \int \psi dx$,</p> <p>($\mu 5$) $\int (\int \phi dx) dy \equiv \int (\int \phi dy) dx$,</p> <p>($\mu 6$) $\int \phi_i \bullet \chi_{x_i} dt \equiv \int \phi_{x_i} \bullet \chi_i dt$,</p> <p>($\mu 7$) $\int \phi_i \bullet \chi_{x_i} dt \equiv \int (\tilde{r} \phi_i) \bullet \chi_{x_i} dt$,</p> <p>($\mu 8$) $\int \phi_i \bullet (\chi_{x_i} \oplus \psi_i) dt \equiv \int \phi_i \bullet \chi_{x_i} dt \oplus \int \phi_i \bullet \psi_{x_i} dt$.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Aksjomaty Całkowe: <p>($\mu 1$) $\int v dx \equiv v$ dla v niezawierającej zmiennej x wolnej,</p> <p>($\mu 2$) $\int (-\psi) dx \equiv - \int \psi dx$,</p> <p>($\mu 3$) $\int (\phi \rightarrow \psi) dx \equiv \int \phi dx \rightarrow \int \psi dx$,</p> <p>($\mu 4$) $\int (\phi \vee \psi) dx \equiv (\int \phi dx \rightarrow \int \psi dx) \rightarrow \int (\phi \& \psi) dx \rightarrow \int \psi dx$,</p> <p>($\mu 5$) $\int (\int \phi dx) dy \equiv \int (\int \phi dy) dx$,</p> <p>($\mu 6$) $\int \phi_i \bullet \chi_{x_i} dt \equiv \int \phi_{x_i} \bullet \chi_i dt$,</p> <p>($\mu 7$) $\int \phi_i \bullet \chi_{x_i} dt \equiv \int (\tilde{r} \phi_i) \bullet \chi_{x_i} dt$,</p> <p>($\mu 8$) $\int \phi_i \bullet (\chi_{x_i} \oplus \psi_i) dt \equiv \int \phi_i \bullet \chi_{x_i} dt \oplus \int \phi_i \bullet \psi_{x_i} dt$.</p>
Reguły wnioskowania:	<p>MP, podstawianie, reguły ukonieczniania:</p> $\frac{\phi}{\int \phi dx}, \frac{\phi \rightarrow \psi}{\int \phi dx \rightarrow \int \psi dx}$	<p>MP, podstawianie, reguły ukonieczniania</p> $\frac{\phi}{\int \phi dx}, \frac{\phi \rightarrow \psi}{\int \phi dx \rightarrow \int \psi dx},$ $\frac{\alpha_i, \beta_{x_i}}{\int \alpha_i \bullet \beta_{x_i} dt}, \frac{\rho(\alpha_i \bullet \beta_{x_i})}{\int \rho(\alpha_i \bullet \beta_{x_i}) dt} \rightarrow \frac{\rho(\gamma_i \bullet \delta_{x_i})}{\int \rho(\gamma_i \bullet \delta_{x_i}) dt}$

B3. Reprezentacja i Modelowanie Rozmytości w Systemach Logiki Rozmytej dla Całek i Splotów

1 Rezultaty:

Elementy konstrukcji	Hajkowska Logika Całkowa (HLI)	Hajkowska Logika Splotów (HLIC)
Elementy Modeli: $\int k_v dx = r,$ $\int (1-f) dx = 1 - \int f dx,$ $\int (f \rightarrow g) dx \leq (\int f dx \rightarrow \int g dx)$ $\int (f \oplus g) dx = \int f dx + \int g dx - \int (f * g) dx,$ $\int (\int h dx) dy = \int (\int h dy) dx,$ jeśli obie strony zdefiniowane. <p>Założenia: \mathcal{F} – ρ-algebra, $f, g, h, k_v, \dots \in \mathcal{F}$ są całkowalne w sensie Lebesgue'a, $\int f dx \in [0, 1]$, dla każdej $f \in \mathcal{F}$.</p>	Sploty semantyczne: $\int k_v dx = r,$ $\int (1-f) dx = 1 - \int f dx,$ $\int (f \rightarrow g) dx \leq (\int f dx \rightarrow \int g dx)$ $\int (f \oplus g) dx = \int f dx + \int g dx - \int (f * g) dx,$ $\int (\int h dx) dy = \int (\int h dy) dx,$ gdy obie strony zdefiniowane. $\int (f(t)g(x-t)) dt = \int f(t)g(x-t) dt,$ $r \int f(t)g(x-t) dt = \int (r f(t))g(x-t) dt,$ $\int f(t)(g(x-t) + h(x-t)) dt = \min \left\{ 1, \int f(t)g(x-t) dt + \int f(t)h(x-t) dt \right\}.$ <p>Założenia: \mathcal{F} – ρ-algebra, $f, g, h, k_v, \dots \in \mathcal{F}$ są całkowalne w sensie Lebesgue'a, $\int f dx \in [0, 1]$, dla każdej $f \in \mathcal{F}$, $\int f(t)g(x-t) dt \in [0, 1]$, dla każdej f, g całkowalnej w sensie Lebesgue'a.</p>	
Postać ogólna modeli:	<p>Modele probabilistyczne postaci M :=</p> $\langle \{M\}, R_1^M, \dots, R_k^M, f_1^M, \dots, f_n^M, c_1, \dots, c_l, \mu \rangle,$ <p>gdzie:</p> <ul style="list-style-type: none"> $\{M\}$ jest przeliczalny lub skończony, R_k^M, f_j^M, dla $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n; 1 \leq l \leq l$, interpretują produkty i symbole funkcyjne (resp.) standardowo (nad zbiorem $[0, 1]$) c_1^M, \dots, c_m^M interpretują stałe języka HLI, μ jest miarą probabilistyczną na M. 	<p>Modele probabilistyczne postaci M :=</p> $\langle \{M\}, R_1^M, \dots, R_k^M, f_1^M, \dots, f_n^M, c_1, \dots, c_l, \mathcal{I}, \mathcal{C} \rangle.$ <p>gdzie wszystkie komponenty definiowane są jak w modelach HLI, a \mathcal{I} jest niepustą (skończoną lub przeliczalną) klasą semantycznych całek Lebesgue'a nad ρ-algebrą \mathcal{F}, a \mathcal{C} – niepustą (skończoną lub przeliczalną) klasą splotów nad tą samą \mathcal{F}.</p>

B3. Reprezentacja i Modelowanie Rozmytości w Systemach Logiki Rozmytej dla Całek i Splotów

1 Rezultaty:

Rodzaj miary	Wyrażenia całkowe HLI z ' μ '	Wyrażenia splotowe (HLIC) z ' μ '
Diraca	$\forall \epsilon > 0 \left(\mu(\{x : f(x) = 1\} - \{y : g(y) = 1\}) < \epsilon \right)$ $\Leftrightarrow \mathcal{M} \models^H \int f d\mu = \int g d\mu^n.$	$\forall \epsilon > 0 \left(\mu(\{t \in M : f_\alpha(t)g_\beta(x-t) = 1\} - \{ \tau \in M : h_\gamma(\tau)j_\delta(y-\tau) = 1\}) < \epsilon \right).$ <ul style="list-style-type: none"> $\alpha_i, \beta_{x-t}, \gamma_t, \delta_{x-t}$ są symbolami funkcyjnymi (nad parą argumentów $(t, x-t)$) interpretowanymi w \mathcal{M} przez funkcje $f_{\alpha}, g_{\beta}, h_{\gamma}$ oraz j_{δ} (resp.) $\{ \tau : h_\gamma(\tau)j_\delta(x-\tau) = 1 \} \subseteq \{ t : f_\alpha(t)g_\beta(x-t) = 1 \}$, oba zbiory są mierzalne w sensie Lebesgue'a
nie-Diraca	$\forall \epsilon > 0 \left(\sum_{i,j \in I} \mu(\{x \in M : f_\phi(x) > \alpha_i\} - \{x \in M : g_\psi(x) > \alpha_j\}) < \epsilon \right).$ <ul style="list-style-type: none"> $\alpha_i, \alpha_j \in (0, 1)$, dla każdego $i, j \in I$ – (co najwyżej) przeliczalnego zbioru indeksów α_i oraz α_j takie, że $\{x \in M : g_\psi(x) > \alpha_j\} \subseteq \{x \in M : f_\phi(x) > \alpha_i\}$ i każdy ze zbiorów jest mierzalny w sensie Lebesgue'a f_ϕ, g_ψ – funkcje proste całkowalne w sensie Lebesgue'a. 	$\forall \epsilon > 0 \left(\sum_{i \in I, j \in J} \mu(\{t \in M : f_\alpha(t)g_\beta(x-t) > \alpha_i\} - \{ \tau \in M : h_\gamma(\tau)j_\delta(y-\tau) > \alpha_j\}) < \epsilon \right).$ <ul style="list-style-type: none"> $\alpha_i, \beta_{x-t}, \gamma_t, \delta_{x-t}$ są symbolami funkcyjnymi (nad parą argumentów $(t, x-t)$) interpretowanymi w \mathcal{M} przez funkcje $f_{\alpha}, g_{\beta}, h_{\gamma}$ oraz j_{δ} (resp.) $\{ \tau : h_\gamma(\tau)j_\delta(x-\tau) > \alpha_j \} \subseteq \{ t : f_\alpha(t)g_\beta(x-t) > \alpha_i \}$, for $\alpha_i, \alpha_j \in (0, 1), i \in I, j \in J$, wszystkie zbiory różnicowe są mierzalne w sensie Lebesgue'a

B3. Reprezentacja i Modelowanie Rozmytości w Systemach...



Definicja 9 (*HLI jako logika abstrakcyjna*). HLI jest trójką $(\mathcal{K}, \text{Sent}_{\mathcal{L}(HLI)}, \models^H)$, gdzie:

1. \mathcal{K} jest klasą modeli probabilistycznych zamkniętych na izomorfizmy, redukcje oraz zmianę nazw,
2. $\text{Sent}_{\mathcal{L}}$ jest zbiorem S -zdań $\mathcal{L}(HLI)$,
3. \models^H jest relacją spełniania w sensie Hajka (określoną w Definicji 8.).

Definicja 10 (*System \triangleleft^H -aprosymacyjny Hajka*). Niech \mathcal{L} będzie pewną logiką abstrakcyjną. Wówczas binarna relacja \triangleleft^H stanowi system \triangleleft^H -aprosymacyjny Hajka wtedy i tylko wtedy gdy zachodzą następujące warunki:

1. \triangleleft^H jest relacją przechodnią,
2. Jeśli $\phi \triangleleft^H \phi'$ oraz $\phi \in \mathcal{L}[L]$, wtedy $\phi' \in \mathcal{L}[L]$.
3. Jeśli $\phi \triangleleft^H \phi'$ oraz $\mathcal{M} \models^H \phi$, wtedy $\mathcal{M} \models^H \phi'$. $(\mathcal{L}, \triangleleft^H)$ jest zwana logiką z aproksymacją.

B3. Reprezentacja i Modelowanie Rozmytości w Systemach...



Własność:	Sformułowanie:
Zwartość	Niech $(\mathcal{L}, \triangleleft^H)$ będzie logiką abstrakcyjną z aproksymacją Hajka. $(\mathcal{L}, \triangleleft^H)$ spełnia własność zwartości gdy każda teoria \mathcal{L} która jest skończenie niesprzeczna jest niesprzeczna.
Warunek Elementarnego Łańcucha	<p>Niech $(\mathcal{L}, \triangleleft^H)$ będzie logiką z aproksymacją Hajka. Powiemy, że $(\mathcal{L}, \triangleleft^H)$ spełnia własność elementarnego łańcucha, jeśli zachodzi następująca własność: ilekroć</p> $M_0 \triangleleft_{\mathcal{L}}^{HA} M_1 \triangleleft_{\mathcal{L}}^{HA} M_2 \triangleleft_{\mathcal{L}}^{HA} \dots, (n < \omega),$ <p>to istnieje także taka struktura M of \mathcal{L} – jednoznacznie wyznaczona przez M, że $M_n \triangleleft_{\mathcal{L}}^{HA} M$, dla każdego $n < \omega$.</p>
Własność Słabej Negacji	<p>Niech $(\mathcal{L}, \triangleleft)$ będzie logiką z aproksymacją. Powiemy, że $(\mathcal{L}, \triangleleft)$ posiada własność słabej negacji wtedy i tylko wtedy gdy istnieje monadyczny operator \neg^{weak} na zdaniach \mathcal{L}taki, że</p> <ol style="list-style-type: none"> Jeśli $\phi \in \mathcal{L}[L]$, wtedy $\neg^{weak} \phi \in \mathcal{L}[L]$; Jeśli $\phi \in \mathcal{L}[L]$ oraz M stanowi L-strukturę \mathcal{L}, wtedy: <ul style="list-style-type: none"> $M \models^H \phi$ lub $M \models^H \neg^{weak} \phi$, dla każdej \triangleleft-aproksymacji ϕ' formuły ϕ zachodzi: $M \models^{HA} \neg^{weak} \phi'$ implikuje $M \not\models^{HA} \phi$.

Rysunek: Warunki Nakładane na Klasy Struktur dla HLI/HLIC

B3. Reprezentacja i Modelowanie Rozmytości w Systemach...



- Theorem 1.** (*Twierdzenie Lindstrøma dla rozszerzeń HLI.*) Niech $(\mathcal{L}, \triangleleft)$ oraz (HLI, \triangleleft^H) będą takie, że
1. $(\mathcal{L}, \triangleleft)$ rozszerza (HLI, \triangleleft^H) ,
 2. $(\mathcal{L}, \triangleleft)$ posiada własność zwartości, własność elementarnego łańcucha i jest zamknięte na słabą negację.
- Wówczas $(\mathcal{L}, \triangleleft) \equiv (HLI, \triangleleft^H)$.

Rysunek: Twierdzenie Lindstrøma dla HLI

B3. Reprezentacja i Modelowanie Rozmytości w Systemach...



Start from the elementary chain condition property. Informally speaking, it says:

Prinz₁: *"Whenever you model some phenomena, and your models (with some properties) are linearly ordered, then your modelling process may always be finished".*

The second property of compactness expresses constitutes a 'surrogate' of the following general principle:

Prinz₂: *"Whenever you model some phenomena, and each finite set of phenomena has its model, then you can be sure that the entire (potentially infinite) collection of such phenomena has a model".*

B3. Reprezentacja i Modelowanie Rozmytości w Systemach...



CRI: From ' X is A ' and ' (X, Y) is R ' infer ' Y is B '³⁰ if for all $v \in D_Y$,

$$r_B(v) = \sup_{u \in D_X} (r_A(u) \star r_R(u, v)),$$

where \star is a continuous t -norm³¹.

Rysunek: Kompozycyjna Reguła Wnioskowania Zadeha

B3. Reprezentacja i Modelowanie Rozmytości w Systemach...



One can show how this CRI may be transformed into the corresponding inference rule of BLV logic³² as follows.

- 1) Observe that **CRI** constitutes a kind of semantical deduction, i.e. it contains a semantic necessary condition of the inference (in terms of r_A, r_B, r_R).
- 2) If we transform a typical rule 'IF X is A THEN Y is B ' into $A(X) \rightarrow B(Y)$, then this semantic condition from **CRI** exactly means that the following BLV formula:

$$(\forall y)(B(y) \rightarrow (\exists x)(A(x) \wedge R(x, y)))$$

is 1-true in a given model \mathbf{D} .

- 3) Denote this formula by $Comp(A, R, B)$, we can write

$$BLV \vdash Comp(A, R, B) \rightarrow ((A(X) \wedge R(X, Y)) \rightarrow B(Y)).$$

- 4) It establishes the following corresponding inference rule

$$\frac{Comp(A, R, B), (A(X), R(X, Y))}{B(Y)},$$

which assumes that $\|Comp(A, R, B)\|_{\mathbf{D}} = 1$.

B3. Reprezentacja i Modelowanie Rozmytości w Systemach...



Let's demonstrate how to transform the HLIC:

$$\frac{\alpha_t, \beta_{x-t}}{\int \alpha_t \bullet \beta_{x-t} dt}$$

to the corr. CRI of Zadeh. This inference rule establishes the following:

$$\text{HLIC} \vdash \alpha_t \wedge \beta_{x-t} \rightarrow \int \alpha_t \bullet \beta_{x-t} dt.$$

Exchanging the notation for the more 'predicate'-based, we can reformulate the condition to the following one:

$$\text{HLIC} \vdash A(t) \wedge B(x-t) \rightarrow \int A(t) \bullet B(x-t) dt$$

or more generally:

$$\text{HLIC} \vdash A(t) \wedge B(x-t) \rightarrow Q(A(t) \bullet B(x-t)),$$

B3. Reprezentacja i Modelowanie Rozmytości w Systemach...



- 1) Observe that $A(t), B(x-t)$, etc. as predicates preserve the 'numeric' nature,
 - a) ' $f(x) = 2x$ ', $g(\text{John}) = 27$
- 2) thus – it should be subjected to a kind of a **fuzzification**
 - a) ' $\text{young}(\text{John})$ '
- 3) Logically: we should exchange the function symbols $A(x), B(x-t)$ for the appropriate predicates $A^*(t), B^*(x-t)$, in some enriched $HLIC^*$
- 4) If Con_S is a necessary condition for the inference, we can write

$$\begin{aligned} HLIC^* \vdash \text{Con}_S &\rightarrow (A(t)^* \wedge B(x-t)^* \\ &\rightarrow (\int A(t) \bullet B(x-t) dt)^*), \end{aligned}$$

B3. Reprezentacja i Modelowanie Rozmytości w Systemach...



Con_S might be formulated as follows: for each HLIC* model \mathcal{M} such that $\llbracket \text{Con}_S \rrbracket_{\mathcal{M}} = 1$, it holds $\llbracket A(t)^* \wedge B(x-t)^* \rrbracket_{\mathcal{M}} \leq \llbracket (\int A(t) \bullet B(x-t) dt)^* \rrbracket_{\mathcal{M}}$. We can finally get the following generalized fuzzy inference rule:

**) From "t is A*" and "(x-t) is B*" infer "(x,t) is $Q^*(A,B)$ "ⁿ³⁸ if only for each model \mathcal{M} such that $\llbracket \text{Con}_S \rrbracket_{\mathcal{M}} = 1$, $\llbracket A^*(t) \wedge B^*(x-t) \rrbracket_{\mathcal{M}} \leq \llbracket Q^*(A,B) \rrbracket_{\mathcal{M}}$.*

B6. ...Aplikacyjna Strona Zagadnienia



- A) weryfikacja modelowa i jej automatyzacja,
- B) programistyczne aspekty konstrukcji quasi-modeli i jego elementów budulcowych
- C) programistyczne i obliczeniowe aspekty kodowania informacji i detekcji błędów,
- D) reprezentacji wiedzy: aspekty obliczeniowe i inferencyjne.

B7. Próba porównawczej analizy paradygmatów



Wielowartościowość:	logiczny	kategorialno-logiczny	kategorialny
reprezentacja	logiki wielowartościowe (epistemiczne/deontyczne) jako nowy komponent temporalnych logik interwałowych (HS, ITL)	brak	brak
modelowanie	wielosortowe modele Kripkego, modele rozwłóknione	modele rozwłóknione jako formy rozwłóknionych struktur kategorialnych (pullback)	diagramy i multi-diagramy kategorialne nieprzemienne z końcowymi zbiorami różnicowymi skończonymi
obszary aplikacji	systemy wieloagentowe, reprezentacja wiedzy, opisy systemów inżynierskich i ich własności (typu: obwody cyfrowe)	NE	teoria kodowania, Hamminga

B7. Próba porównawczej analizy paradygmatów



Quasi-rozmytość:	logiczny	kategorialno-logiczny	kategorialny
reprezentacja	logiki wielosortowe epistemiczno-multi-modalne (typu AFLAP)	multi-modalne fragmenty rachunków wielosortowych (typu AFLAP)	brak
modelowanie	modele produktowo-fuzzyjne, quasi-modele	multi-diagramy przemienne korespondujące z multi-modalnymi fragmentami rachunków wielosortowych	multi-diagramy przemienne
obszary aplikacji	reprezentacja wiedzy, weryfikacja modelowa i jej automatyzacja, automatyzacja procedur konstrukcji quasi-modeli	automatyzacja procedur konstrukcji quasi-modeli w jej kategorialnych aspektach	automatyzacja procedur badania podobieństwa zbiorów (utruty informacji)
Rozmytość:	logiczny	kategorialno-logiczny	kategorialny
reprezentacja	rozmyte predykatowe rozszerzenia logiki Łukasiewicza (typu: FLI, HLI, HLIC)	brak	brak
modelowanie	modele probabilistyczne, semantyczne komponenty logik abstrakcyjnych	diagramy i multi-diagramy przemienne dla operacji	diagramy i multi-diagramy kategorialne nieprzemienne z końcowymi zbiorami różnicowymi nieprzeliczalnymi
obszary aplikacji	reprezentacja wiedzy: aspekty obliczeniowe i inferencyjne	NE	NE



Dziękuję za uwagę!

Lista Cytowanych Prac



- D1)** J. van Benthem, The epistemic logic of if games, Technical reports (2003)
- D2)** J. van Benthem, Amélie Gheerbrant, Game Solution, Epistemic Dynamics and Fixed-Point Logics. *Fundamenta Informaticae* 100(2010), pp. 19-41 (2010)
- D3)** J. van Benthem, F. Liu, Deontic logic and preference change, *FLAP* 1 (2014) 1-46.
- D4)** F. Wolter, M. Zakharyashev, Satisfiability problem in description logics with modal operators, in: *PRINCIPLES OF KNOWLEDGE REPRESENTATION AND REASONING-INTERNATIONAL CONFERENCE*, Morgan Kaufmann Publishers, 1998, pp. 512-523.
- D5)** F. Wolter, M. Zakharyashev, Temporalizing description logics, in: *FroCoS*, 1998, pp. 379-402.
- D6)** F. Wolter, The product of converse pdl and polymodal k, *J. Log. Comput.* 10 (2000) 223-251.
- D7)** D. M. Gabbay, A. Kurucz, F. Wolter, M. Zakharyashev, *Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Applications*, 2003
- D8)** D. Gabbay, V. Shehtman, Products of modal logics, part 1, *Logic Journal of the IGPL* 6 (1998) 73-146.
- D9)** Petr Hájek, *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Trends in Logic 4, Kluwer 1998, ISBN 978-1-4020-0370-7, pp. 1-299.
- D10)** P. Lindström, "On Extensions of Elementary Logic," *Teoria*, vol. 35, pp. 1-11, 1969.
- D11)** J. Benthem, "A New Modal Lindstrom Theorem," *Logical Universalis*, vol. 1(1), pp. 125-138, 2007